BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

NGUYỄN TRÍ ĐẠT

NGHIỆM LIOUVILLE CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ CẤP MỘT

NGÀNH: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
MÃ SỐ: 9 46 01 04

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

BÌNH ĐỊNH - 2024

Công trình được hoàn thành tại Trường Đại học Quy Nhơn

Tập thể hướng dẫn:

1. TS. Ngô Lâm Xuân Châu
2. PGS. TS. Lê Công Trình

Phản biện 1: GS. TSKH. Phùng Hồ Hải

Phản biện 2: GS. TS. Đặng Đức Trọng

Phản biện 3: PGS. TS. Lê Anh Vũ

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án họp tại Trường Đại học Quy Nhơn vào hồi ....

Có thể tìm hiểu luận án tại:
- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Thư viện Trường Đại học Quy Nhơn

Mục lục

Mở đầu

Một *phương trình vi phân* (DE) là một phương trình chứa các hàm chưa biết và đạo hàm của chúng. Nếu phương trình chỉ chứa một hàm chưa biết và các đạo hàm tương ứng chỉ phụ thuộc vào một biến độc lập, nó được gọi là *phương trình vi phân thường* (ODE). Một phương trình vi phân được gọi là *tuyến tính* nếu sự ràng buộc giữa hàm số và các đạo hàm là tuyến tính; ngược lại, nó được gọi là một phương trình vi phân *phi tuyến*. Có nhiều phương trình vi phân thường trong vật lý là tuyến tính, do đó chúng có nhiều cách giải. Một ý tưởng để giải phương trình phi tuyến đó là biến đổi chúng về dạng tuyến tính, tuy nhiên, về mặt tổng quát có rất ít trường hợp thoả phương pháp này. Do đó nghiên cứu phương trình vi phân phi tuyến một cách độc lập là cần thiết, và cũng nhiều thử thách. Luận án này nghiên cứu nghiệm liouville tổng quát của *phương trình vi phân đại số* cấp một (AODEs); đây là một lớp phương trình quan trọng của lí thuyết phương trình vi phân đại số phi tuyến.

Một phương trình vi phân đại số (AODE) cấp một là phương trình vi phân có dạng $F(y, y') = 0$, trong đó F là một đa thức bất khả quy hai biến với hệ số thuộc vào $\mathbb{K}(x)$, với $\mathbb{K}$ là trường đóng đại số có đặc số 0. Giải phương trình vi phân là vấn đề xác định một hàm khả vi $y = y(x)$ sao cho $F(y(x), y'(x)) = 0$. Nếu $y(x)$ thuộc vào $\mathbb{K}(x)$ (mở rộng đại số của $\mathbb{K}(x)$), thì $y(x)$ được gọi là một *nghiệm hữu tỷ* (*nghiệm đại số*). $y(x)$ được gọi là một *nghiệm liouville* nếu nó thuộc vào một mở rộng liouville của $\mathbb{K}(x)$. Nếu một nghiệm chứa một hằng số bất kì nó được gọi là *nghiệm tổng quát*. Ví dụ, $y(x) = \exp(x^2 + c)$ là một nghiệm *liouville tổng quát* của phương trình đại số cấp một $y' - 2xy = 0$.

Phương trình vi phân đại số cấp một đã được nghiên cứu phổ biến và có nhiều giải thuật cho các lớp phương trình đặc biệt. Một trong những nghiên cứu sớm nhất cho các phương trình này là công trình của Fuchs [16] (1884). Trong [20] (1926), Ince đã trình bày một bức tranh tổng quát về phương trình vi phân thường. Trong hai công bố [30, 31] (1970s), Matsuda phân loại các trường hàm vi phân (sai khác đẳng cấu) không có các điểm kì dị di chuyển được. Trong bài báo [29] (1913), Malmquist đã nghiên cứu các lớp phương trình vi phân cấp một có nghiệm phân hình siêu việt, và Eremenko xem xét lại vấn đề này trong [10] (1982). Áp dụng lý thuyết của Matsuda, Eremenko, [11] (1998), đưa ra kết quả lý thuyết về sự chặn bậc của nghiệm hữu tỷ, điều này có một vai trò lớn trong việc tìm dạng biểu diễn cụ thể của loại nghiệm này.

Có thể xem Liouville (khoảng năm 1830) là một trong những người đầu tiên xem xét dạng phương trình đơn giản nhất $y' = \alpha$, với $\alpha \in \mathbf{k}$, ở đây $\mathbf{k}$ là một trường vi phân đặc số 0. Nếu phương trình này có một nghiệm thuộc vào trường vi phân mở rộng sơ cấp E có cùng trường hằng $\mathbb{K}$ của $\mathbf{k}$, thì tồn tại $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \overline{\mathbb{K}}$ và các phần tử $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \overline{\mathbb{K}}\mathbf{k}$ và $v \in \mathbf{k}$ sao cho

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'.$$

Trong bài báo [44] (1968), Rosenlicht chỉ ra rằng định lí Liouville có thể trình bày hoàn toàn bằng công cụ đại số. Về thuật toán cho các phương trình này, Risch được xem là người tiên phong. Trong các công bố [41, 42] (1960s), Risch mô tả phương pháp để xác định *tích phân sơ cấp* của $\int u$ với u là một *hàm sơ cấp*. Mở rộng phương pháp của Risch, trong các bài báo [51,52] (1970s), Singer nghiên cứu *nghiệm sơ cấp* của phương trình vi phân đại số cấp một. Một áp dụng cụ thể là điều kiện cần và đủ để phương trình $y' = R(y) \in \mathbb{C}(y)$ có một nghiệm sơ cấp. Trong [56] (2017), Srinivasan tổng quát kết quả của Singer cho trường hợp tìm nghiệm liouville. Trong [25] (1986), Kovacic trình bày một phương pháp đầy đủ và hiệu quả để tìm ngiệm liouville của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2. Thuật toán tìm nghiệm hữu tỷ tổng quát của phương trình Riccati trong phương pháp của Kovacic được áp dụng trong các bài báo của Chen và Ma [7] (2005) và Võ cùng các cộng sự [57] (2018) để giải quyết bài toán xác định nghiệm hữu tỷ tổng quát của phương trình vi phân đại số cấp một tham số hoá được. Trong [19] (1996), Hubert nghiên cứu nghiệm tổng quát dạng ẩn bằng cách tính toán trên cơ sở Gröbner. Trong bài báo [40] (1983), Prelle và Singer nghiên cứu *tích phân sơ cấp toàn phần* $I(x, y)$ của hệ phương trình có dạng

$$\frac{dx}{dz} = P(x, y); \ \frac{dy}{dz} = Q(x, y), \text{ với } P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$$

từ đó dẫn đến một nghiệm tổng quát $I(x, y) = c$ của phương trình $y' = \dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}$. Trong bài báo [55] (1992), Singer xem xét lại vấn đề này với câu hỏi tìm *tích phân liouville toàn phần* $I(x, y)$. Gần đây, trong công bố [9] (2021), Duarte và Da Mota đã trình bày một phương pháp tính toán hợp lý cho tích phân liouville toàn phần.

Thuật toán trong hai công bố của Feng và Gao [14,15] (2000s) được xem là điểm xuất phát của phương pháp hình học đại số để giải phương trình vi phân đại số cấp một. Thuật toán này xác định liệu một phương trình vi phân cấp một autonom, $F(y, y') = 0$, có một nghiệm hữu tỷ tổng quát và tìm được trong trường hợp khả thi. Điểm mấu chốt của ý tưởng là một nghiệm hữu tỷ tương ứng với một phép tham số hữu tỷ, từ đó, chúng ta tìm lại một phép tham số hữu tỷ khác sao cho thành phần thứ hai là vi phân của thành phần đầu tiên. Sự tồn tại của phép tham số riêng được khẳng định bởi Sendra và Winkler [49] (2001). Kết quả này kéo theo sự xác định của nghiệm hữu tỷ tổng quát.

Một số trường hợp tổng quát hơn được phát triển dựa trên ý tưởng bài báo của Feng và Gao [14, 15] . Chúng tôi trình bày một vài công trình tiêu biểu kế thừa ý tưởng này. Trong [7], Chen và Ma đưa việc xác định nghiệm hữu tỷ tổng quát của lớp phương trình vi phân đại số cấp một tham số hoá được về việc giải phương trình Riccati thông qua phép tham số hữu tỷ, khi đó, phương pháp trong bài báo [25] có thể áp dụng. Tuy nhiên, bài báo này chưa đầy đủ vì chưa chắc chắn dạng hữu tỷ của phép tham số. Nghiên cứu trên cùng lớp phương trình này, trong hai công bố [33, 34] (2010s), Ngô và Winkler đã trình bày một phương pháp tìm nghiệm hữu tỷ tổng quát dựa trên phép tham số hữu tỷ của mặt cong đại số. Bằng việc xác định một phép tham số tối ưu của đường cong đại số trên trường hữu tỷ, Võ và cộng sự [57] đã bổ sung đầy đủ cho bài báo [7] và đạt được một thuật toán đầy đủ để tìm nghiệm hữu tỷ tổng quát của phương trình vi phân đại số cấp một. Một bản tổng kết và tóm lược một số hướng nghiên cứu khác của phương pháp hình học đại số có thể tìm ở công bố của Sebastian và cộng sự [12] (2023).

Trong luận án này, chúng tôi kế thừa và mở rộng các ý tưởng của Feng và Gao [14, 15], Srinivasan [56], và Võ cùng cộng sự [57] cho vấn đề tìm nghiệm liouville tổng quát của phương trình vi phân đại số cấp một. Luận án đạt được các kết quả sau.

- Định nghĩa nghiệm liouville hữu tỷ (Định nghĩa 2.2.3) và đưa ra Thuật toán `RatLiouSol` trong Mục 2.4 để tìm nghiệm liouville hữu tỷ của phương trình vi phân đại số cấp một autonom.
- Chứng tỏ rằng nghiệm liouville (bao gồm cả nghiệm đại số) của phương trình vi phân đại số cấp một autonom giống không là nghiệm liouville hữu tỷ (Bổ đề 3.2.2), và đề xuất Thuật toán `LiouSolAut` trong Mục 3.3 để tìm và phân loại nghiệm liouville cho hai trường hợp nghiệm: đại số và siêu việt.
- Đề xuất Thuật toán `LiouSol` trong Mục 4.1.2 để tìm nghiệm liouville của phương trình vi phân đại số cấp một giống không (bao gồm cả trường hợp autonom và không autonom).
- Định nghĩa phép biến đổi luỹ thừa (Định nghĩa 4.2.1) và đưa ra Thuật toán `RedPol` trong Mục 4.2.2 để tìm dạng rút gọn của phương trình vi phân đại số cấp một. Từ đó đưa ra một phương pháp tìm nghiệm liouville của phương trình vi phân đại số có giống dương nhưng dạng rút gọn có giống bằng không.
- Đưa vấn đề tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp một với hệ số thuộc vào một mở rộng liouville về giải một phương trình vi phân dạng (4.1) bằng phép đổi biến trong Mục 4.4.

Luận án này tổng kết quá trình làm việc của chúng tôi trong ba năm qua và trình bày sơ lược về các vấn đề chúng tôi tiếp tục quan tâm. Cấu trúc của luận án được trình bày như sau.

Chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản của đại số vi phân và hình học đại số và các công cụ chính dùng trong luận án.

Trong Chương 2, chúng tôi định nghĩa nghiệm liouville hữu tỷ của phương trình vi phân đại số cấp một autonom. Sử dụng tính chất của phép tham số hữu tỷ, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ để một phương trình vi phân đại số cấp một autonom có nghiệm liouville hữu tỷ. Từ kết quả lí thuyết, chúng tôi trình bày một thuật toán xác định nghiệm liouville hữu tỷ của phương trình vi phân đại số cấp một autonom.

Trong Chương 3, dùng lý thuyết trường hàm một biến, chúng tôi chỉ ra được một nghiệm liouville (nếu tồn tại) của phương trình vi phân đại số cấp một autonom giống không chính là nghiệm liouville hữu tỷ. Hơn nữa, nghiệm liouville này có thể mô tả thông qua ràng buộc đại số bởi kết thức Sylvester. Các kết quả này dẫn đến một thuật toán xác định sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân đại số cấp một autonom giống không.

Trong Chương 4, chúng tôi nghiên cứu nghiệm liouville của phuong trình vi phân cấp một giống không thông qua phương trình vi phân liên hợp ứng với một phép tham số hữu tỷ. Dùng lý thuyết trường hàm đại số, chúng tôi chỉ ra rằng sự tương ứng này bảo toàn tính chất có nghiệm liouville. Kết quả này bao gồm trường hợp phương trình autonom trong Chương 3. Thêm nữa, chúng tôi đưa ra một thuật toán xác định dạng rút gọn của một phương trình vi phân bởi phép biến đổi luỹ thừa. Điều này đưa đến một phương pháp tìm nghiệm liouville của phương trình vi phân đại số cấp một giống lớn hơn không nhưng dạng rút gọn có giống không. Cuối cùng, bởi phép đổi biến, chúng tôi nghiên cứu phương trình vi phân đại số cấp một với hệ số thuộc vào một mở rộng liouville của $\mathbb{C}(x)$.

Chương 1

Kiến thức cơ sở

Kiến thức cơ sở của đại số vi phân và hình học đại số cần thiết cho luận án này có thể tìm trong các tài liệu tiêu chuẩn tương ứng như [4, 24, 43] và [8, 27, 50, 59].

1.1 Đại số vi phân

Định nghĩa 1.1.1. Cho $\mathbf{k}$ là một trường có đặc số 0. Một *đạo hàm* của trường $\mathbf{k}$, kí hiệu bởi $'$, là một toán tử trên $\mathbf{k}$ thỏa:

1. $(a+b)' = a' + b'$
2. $(ab)' = a'b + ab'$

với mọi $a, b \in \mathbf{k}$. Một trường $\mathbf{k}$ được trang bị một $'$ được gọi là một *trường vi phân*. Một phần tử $a \in \mathbf{k}$ được gọi là *hằng số* nếu $a' = 0$.

Định nghĩa 1.1.2. Một trường mở rộng E của $\mathbf{k}$ được gọi là *trường mở rộng vi phân* của $\mathbf{k}$ nếu và chỉ nếu đạo hàm của E hạn chế trên $\mathbf{k}$ đồng nhất với đạo hàm của $\mathbf{k}$.

1.2 Đường cong đại số

Định nghĩa 1.2.1. Cho K là một trường đóng đại số có đặc số 0. Một tập hợp con $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2(K)$ được gọi là một *đường cong đại số* (đường cong, viết gọn) nếu tồn tại một đa thức bất khả quy khác hằng số $F \in K[X, Y]$ sao cho $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F)$. Khi đó F được gọi là *đa thức xác định* của $\mathcal{C}$. Đôi khi ta cũng có thể gọi $F(x, y) = 0$ là một đường cong đại số.

1.3 Trường hàm đại số một biến

Định nghĩa 1.3.1. Cho K là một trường đóng đại số có đặc số 0. Một trường $L \supset K$ được gọi là *trường hàm đại số một biến* trên K nếu các điều kiện sau thỏa: L chứa một phần tử x siêu việt trên K, và L hữu hạn sinh đại số trên $K(x)$.

1.4 Hàm hữu tỷ trên đường cong đại số

Nội dung chi tiết của mục này có thể xem ở [26, Chapter 4].

1.5 Chuẩn bị

Định nghĩa 1.5.1. Cho $F(y, y') = 0$ là một phương trình vi phân cấp một trên K. Đường cong $F(y, w) = 0$ với $F(y, w) \in K[y, w]$ được gọi là *đường cong đại số tương ứng* của $F(y, y') = 0$.

1.5.1 Trường hàm đại số liên kết

Định nghĩa 1.5.2. Nếu L là trường hàm đại số một biến trên K, tồn tại $\eta, \xi \in L$ sao cho $L = K(\eta, \xi)$ với η là phần tử siêu việt trên K và ξ đại số trên $K(\eta)$. Trường hàm $L = K(\eta, \xi)$ được gọi là *trường hàm liên kết* của đường cong đại số $\mathcal{C}$ xác định bởi đa thức bất khả quy F nếu $F(\eta, \xi) = 0$. Đường cong đại số $\mathcal{C}$ được gọi là một *đại diện affine* của trường hàm đại số L.

Bổ đề 1.5.3. [37, Lemma 2.7] Nếu η là một nghiệm siêu việt trên K của phương trình vi phân $F(y, y') = 0$, thì $K(\eta, \eta')$ là một trường hàm liên kết của đường cong đại số tương ứng $\mathcal{C}$ xác định bởi $F(y, w)$. Hơn nữa, nếu $\mathcal{C}$ có giống không thì trường hàm liên kết $K(\eta, \eta')$ có dạng $K(t)$.

1.5.2 Phép tham số hữu tỷ

Định nghĩa 1.5.5. Một *phép tham số hữu tỷ* của một đường cong đại số $\mathcal{C}$ xác định bởi $F(y, w)$ là một cặp hàm số hữu tỷ $\mathcal{P}(t) = (r(t), s(t)) \in K(t)^2$ sao cho hai tính chất sau đúng.

1. Với hầu hết t_0 thì $\mathcal{P}(t_0) = (r(t_0), s(t_0)) \in \mathcal{C}$.

2. Với hầu hết $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ tồn tại $t_0 \in K$ sao cho $\mathcal{P}(t_0) = (x_0, y_0)$.

Một đường cong đại số được gọi là *hữu tỷ* hoặc là một *đường cong hữu tỷ* nếu nó có một phép tham số hữu tỷ $\mathcal{P}(t)$. Hơn nữa, nếu t_0 là duy nhất thì phép tham số hữu tỷ $\mathcal{P}(t)$ này được gọi là một *phép tham số riêng*.

Chương 2

Nghiệm liouville hữu tỷ của phương trình vi phân đại số cấp một autonom

Chương này xét phương trình vi phân đại số cấp một autonom

$$F(y, y') = 0. \tag{2.1}$$

2.1 Giải phương trình vi phân đại số cấp một bằng phép tham số

Định lí 2.1.4. [14, Theorem 5] *Cho $y = r(x), w = s(x)$ là một phép tham số riêng của $F(y, w) = 0$ với $r(x), s(x) \in \bar{\mathbb{Q}}(x)$. Phương trình $F = 0$ có một nghiệm hữu tỷ tổng quát nếu và chỉ nếu một trong* *các biểu thức sau xảy ra*

$$ar'(x) = s(x) \quad \text{hoặc} \quad a(x-b)^2 r'(x) = s(x) \tag{2.4}$$

với $a, b \in \bar{\mathbb{Q}}$ *và* $a \neq 0$. *Nếu một trong các biểu thức trên đúng, thay* x *bởi* $a(x+c)$ *(hoặc* $b - \dfrac{1}{a(x+c)}$*) vào* $y = r(x)$*, chúng ta thu được một nghiệm hữu tỷ tổng quát của* $F = 0$*, với* c *là hằng số bất kì.*

2.2 Nghiệm liouville hữu tỷ

Định nghĩa 2.2.2. [35, Definition 2.7] Cho E là mở rộng liouville của $\mathbb{C}$ và $t \in E \backslash \mathbb{C}$. t được gọi là *phần tử liouville hữu tỷ* trên $\mathbb{C}$ nếu $t' \in \mathbb{C}(t)$.

Định nghĩa 2.2.3. [35, Definition 2.8] Cho $F(y, y') = 0$ là phương trình vi phân đại số cấp một autonom. Một nghiệm $y = r(t)$ của $F(y, y') = 0$ được gọi là nghiệm *liouville hữu tỷ* trên $\mathbb{C}$ nếu nó có dạng

$$r(t) = \frac{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0}{b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0},$$

với $m, n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, và t là phần tử liouville hữu tỷ trên $\mathbb{C}$.

2.3 Kết quả chính

Bổ đề 2.3.1. [35, Lemma 3.1] Nếu phương trình vi phân đại số cấp một autonom $F(y, y') = 0$ có nghiệm liouville hữu tỷ khác hằng số thì $F(y, w) = 0$ là đường cong hữu tỷ.

Bổ đề 2.3.4. [35, Lemma 3.2] *Giả sử* $F(y, w) = 0$ *có* $(r_1(t), s_1(t))$ *là một phép tham số riêng hữu tỷ. Nếu* $F(y, y') = 0$ *có một nghiệm liouville hữu tỷ khác hằng số thì* $\dfrac{\frac{dr_1}{dt}}{s_1(t)}$ *có dạng* $\dfrac{dz}{dt}$ *hoặc* $\dfrac{\frac{dz}{dt}}{az}$*, với* $z \in \mathbb{C}(t)$ *và* $a \in \mathbb{C} \backslash 0$.

Bổ đề 2.3.5. [35, Lemma 3.3] *Cho $(r(t), s(t))$ là một phép tham số riêng hữu tỷ của $F(y, w) = 0$. Đặt $h(t) = \dfrac{\frac{dr}{dt}}{s(t)}$, xét hai trường hợp:*

1. Nếu tồn tại $z(t) \in \mathbb{C}(t)$ sao cho $h(t) = \dfrac{dz}{dt}$, đặt $z(t) = x$, ta được $r(t)$ là một nghiệm liouville hữu tỷ của $F(y, y') = 0$.

2. Nếu tồn tại $z(t) \in \mathbb{C}(t)$ sao cho $h(t) = \dfrac{\frac{dz}{dt}}{az}$ với $0 \neq a \in \mathbb{C}$, đặt $z(t) = \exp ax$, ta được $r(t)$ là một nghiệm liouville hữu tỷ của $F(y, y') = 0$.

Bổ đề 2.3.6. [35, Lemma 3.4] *Cho $F(y, w) = 0$ là một đường cong hữu tỷ trên $\mathbb{C}$ với $(r_1(t), s_1(t))$ và $(r_2(t), s_2(t))$ là hai phép tham số riêng. Khi đó*

$$t' = \frac{s_1(t)}{\frac{dr_1(t)}{dt}} \quad \text{và} \quad t' = \frac{s_2(t)}{\frac{dr_2(t)}{dt}}$$

là tương đương nhau về khả năng có nghiệm liouville.

Định lí 2.3.7. [35, Theorem 3.1] *Phương trình vi phân đại số cấp một autonom $F(y, y') = 0$ có một nghiệm liouville hữu tỷ khác hằng số nếu và chỉ nếu $F(y, w) = 0$ là đường cong hữu tỷ và với mọi tham số riêng $(r(t), s(t))$, tồn tại $z(t) \in \mathbb{C}(t)$ sao cho $\dfrac{\frac{dr}{dt}}{s(t)}$ có dạng $\dfrac{dz}{dt}$ hoặc $\dfrac{\frac{dz}{dt}}{az}$ với phần tử khác không $a \in \mathbb{C}$. Trường hợp thứ nhất, đặt $z(t) = x$, và trường hợp thứ hai, đặt $z(t) = \exp ax$, với $x' = 1$, khi đó $r(t)$ là một nghiệm liouville hữu tỷ của $F(y, y') = 0$.*

2.4 Thuật toán và các ví dụ

Thuật toán `RatLiouSol`

Đầu vào: Đường cong đại số $F(y,w)=0$ trên $\mathbb{C}$.

Đầu ra: Nghiệm liouville hữu tỷ của $F(y,y')=0$ nếu có.

1. Nếu $F(y,w)=0$ không phải là đường cong hữu tỷ, thì **trả về** "$F(y,y')=0$ không có nghiệm liouville hữu tỷ". Nếu khác,
2. Tìm một phép tham số riêng $(r(t),s(t))$ và đặt $h(t)=\dfrac{\frac{dr}{dt}}{s(t)}$.
3. Nếu $h(t)$ không thoả các trường hợp của Định lí 2.3.7, thì **trả về** "$F(y,y')=0$ không có nghiệm liouville hữu tỷ". Nếu khác,
4. Nếu $h(t)=\dfrac{dz}{dt}$ với $z(t)\in\mathbb{C}(t)$, đặt $z(t)=x$. Ta xét:

   (a) Nếu $h(t)=\dfrac{1}{a}\in\mathbb{C}$, ta đặt $z(t)=\dfrac{t}{a}=x$. Khi đó $t=g(x)=ax$, và $y=r(ax)$ là một nghiệm hữu tỷ. Từ đó $r(a(x+c))$ là nghiệm hữu tỷ tổng quát.

   (b) Nếu $h(t)=\dfrac{1}{a(t-b)^2}$, ta đặt $z(t)=\dfrac{-1}{a(t-b)}=x$. Khi đó $t=g(x)=b-\dfrac{1}{ax}$. Vậy $y=r\left(b-\dfrac{1}{ax}\right)$ là một nghiệm hữu tỷ. Từ đó $r\left(b-\dfrac{1}{a(x+c)}\right)$ là nghiệm hữu tỷ tổng quát.

   (c) Nếu $t=g(x)$ và hai trường hợp (a) và (b) không xảy ra, thì $F(y,y')=0$ có nghiệm căn thức $r(g(x))$. Trong trường hợp này, $r(g(x+c))$ là nghiệm căn thức tổng quát.

   (d) Nếu không tồn tại nghiệm căn $g(x)$ sao cho $t=g(x)$, thì $r(t)$ là nghiệm liouville hữu tỷ (không là nghiệm căn thức).
5. Nếu $h(t)=\dfrac{\frac{dz}{dt}}{az}$ với $z(t)\in\mathbb{C}(t)$, ta đặt $z(t)=\exp ax$. Giả sử $t=g(x)$, ta được $r(g(x))$ là nghiệm liouville hữu tỷ (siêu việt). Khi đó, $r(g(x+c))$ là nghiệm liouville hữu tỷ tổng quát.

Chương 3

Nghiệm liouville của phương trình vi phân đại số cấp một autonom giống không

3.1 Kết thức Sylvester

Cho $\mathcal{P}(t) = \left(\dfrac{m(t)}{n(t)}, \dfrac{p(t)}{q(t)}\right)$, với $m(t), n(t), p(t), q(t) \in \mathbb{C}[t]$, và xem xét các đa thức sau

$$G_1^{\mathcal{P}}(s,t) = m(s)n(t) - n(s)m(t), \quad G_2^{\mathcal{P}}(s,t) = p(s)q(t) - q(s)p(t)$$

$$H_1^{\mathcal{P}}(t,x) = x.n(t) - m(t), \quad H_2^{\mathcal{P}}(t,y) = y.q(t) - p(t).$$

Bổ đề 3.1.2. [50, Lemma 4.6] *Cho $\mathcal{C}$ là đường cong xác định bởi $F(x,y)$, có $\mathcal{P}(t)$ là một phép tham số riêng. Tồn tại $h \in \mathbb{N}$ sao cho:*

$$res_t(H_1^{\mathcal{P}}(t,x), H_2^{\mathcal{P}}(t,y)) = (F(x,y))^h.$$

3.2 Kết quả chính

Bổ đề 3.2.2. [36, Lemma 3.2] *Cho $F(y,w)=0$ là một đường cong hữu tỷ. Giả sử η là một nghiệm liouville của $F(y,y')=0$ trên $\mathbb{C}$ thì η cũng chính là một nghiệm liouville hữu tỷ trên $\mathbb{C}$.*

Định lí 3.2.3. [36, Theorem 3.3] *Cho $F(y,w)=0$ là một đường cong hữu tỷ. Phương trình vi phân đại số autonom $F(y,y')=0$ có nghiệm liouville trên $\mathbb{C}$ khi và chỉ khi với mọi tham số riêng $(r(t),s(t))$ của $F(y,w)=0$, tồn tại $z(t)\in\mathbb{C}(t)$ sao cho phương trình liên hợp $h(t)$ có dạng $\frac{dz}{dt}$ hoặc $\frac{\frac{dz}{dt}}{az}$ với phần tử khác không $a\in\mathbb{C}$. Trường hợp thứ nhất, đặt $z(t)=x$, và trường hợp thứ hai, đặt $z(t)=\exp(ax)$, thế thì $r(t)$ là một nghiệm liouville của $F(y,y')=0$.*

Bổ đề 3.2.5. [36, Lemma 3.5] *Giả sử $F(y,w)=0$ có phép tham số riêng $(r(t),s(t))$ sao cho $h(t)$ có dạng $\frac{dz}{dt}$, với $z(t)\in\mathbb{C}(t)$. Nếu $(r_1(t),s_1(t))$ là một phép tham số riêng khác, thì $h_1(t)$ có dạng $\frac{dz_1}{dt}$, với $z_1(t)\in\mathbb{C}(t)$.*

Bổ đề 3.2.6. *Cho $F(y,w)=0$ là một đường cong hữu tỷ. Giả sử $G(x,y)=0$ là một nghiệm đại số của $F(y,y')=0$, vậy thì giống của $G(x,y)=0$ bằng không.*

Định lí 3.2.8. [36, Theorem 3.8] *Cho $F(y,w)=0$ là một đường cong hữu tỷ. Phương trình vi phân $F(y,y')=0$ có nghiệm đại số $G(x,y)=0$ nếu và chỉ nếu phương trình liên hợp $h(t)$ có dạng $\frac{dz}{dt}$, với $z(t)\in\mathbb{C}(t)$. Nếu nghiệm này tồn tại, đa thức $G(x,y)$ sẽ được xác định thông qua tham số hữu tỷ của chính nó.*

Định lí 3.2.9. [36, Theorem 3.9] *Cho $F(y,w)=0$ là một đường cong hữu tỷ. Nếu η là nghiệm liouville siêu việt trên $\mathbb{C}$ của $F(y,y')=0$. Khi đó tồn tại $0\neq a\in\mathbb{C}$ và đa thức bất khả quy G sao cho $G(\exp(ax),\eta)=0$. Nói cách khác, η là nghiệm đại số trên $\mathbb{C}(\exp(ax))$.*

3.3 Thuật toán và áp dụng

Thuật toán `LiouSolAut`

Đầu vào: Đường cong hữu tỷ $F(y, w) = 0$ trên $\mathbb{C}$.

Đầu ra: Nghiệm liouville tổng quát của $F(y, y') = 0$ nếu có.

1. Tìm phép tham số riêng $(r(t), s(t))$ của $F(y, w) = 0$, và xác định phương trình liên hợp $h(t) = \dfrac{\frac{dr}{dt}}{s(t)}$.

2. Nếu $h(t) = \dfrac{dz}{dt}$ với $z(t) \in \mathbb{C}(t)$, đặt $z(t) = x$ và $P(t) = (z(t), r(t))$. Đặt $G(x, y)$ là phần dưới luỹ thừa của
$$res_t(H_1^P(t, x), H_2^P(t, y))$$
trong Bổ đề 3.1.2, thì $G(x, y) = 0$ là một nghiệm đại số. Do đó, $G(x + c, y) = 0$ là nghiệm đại số tổng quát của $F(y, y') = 0$.

3. Nếu $h(t) = \dfrac{\frac{dz}{dt}}{az}$ với $z(t) \in \mathbb{C}(t)$, đặt $z(t) = \exp(ax) = u$. Đặt $P(t) = (z(t), r(t))$, tiến hành tương tự trường hợp (2.), ta thu được $G(u, y) = 0$ là một nghiệm liouville siêu việt. Vậy $G(\exp(a(x + c)), y) = 0$ là nghiệm liouville tổng quát.

4. Nếu khác, thuật toán dừng, và $F(y, y') = 0$ không có nghiệm liouville.

Áp dụng, với $P(y) \in \mathbb{C}[y]$ có bậc 3, ta xét phương trình
$$y'^2 = P(y). \tag{3.1}$$

Mệnh đề 3.3.8. [36, Proposition 4.7 and Remark 4.8] *Phương trình vi phân* (3.1) *có nghiệm liouville trên* $\mathbb{C}$ *nếu và chỉ nếu* $P(y) = 0$ *có nghiệm kép.*

Chương 4

Nghiệm liouville của phương trình vi phân đại số cấp một

Chương này xét một phương trình vi phân đại số cấp một

$$F(Y, Y') = 0, \tag{4.1}$$

với F là đa thức bất khả quy thuộc $\mathbb{C}(z)[y, w]$.

4.1 Nghiệm liouville của phương trình vi phân đại số cấp một giống không

4.1.1 Phương trình vi phân liên kết

Tìm nghiệm của một phương trình vi phân (4.1) qua một phép tham số riêng $\mathcal{P}(t) = (u(t), v(t))$ trong trường hợp có giống bằng không đưa đến việc giải phương trình

$$t'(z) = \frac{v(t) - \dfrac{\partial u(t)}{\partial z}}{\dfrac{\partial u(t)}{\partial t}}. \tag{4.3}$$

Định nghĩa 4.1.1. Phương trình (4.3) được gọi là *phương trình vi phân liên kết* của phương trình vi phân đại số (4.1) tương ứng với một phép tham số riêng $\mathcal{P}(t) = (u(t), v(t))$.

Bổ đề 4.1.2. [37, Lemma 3.3] Cho $P(t)$ và $\tilde{\mathcal{P}}(t)$ là hai phép tham số riêng của F, tồn tại phép đổi biến $s = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$, với $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \overline{\mathbb{C}(z)}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, giữa hai phương trình vi phân liên kết của F ứng với $\mathcal{P}(t)$ và $\tilde{\mathcal{P}}(t)$.

4.1.2 Kết quả chính và thuật toán

Định lý 4.1.3. *[37, Theorem 3.4] Phương trình vi phân đại số cấp một giống không (4.1) có nghiệm liouville tổng quát nếu và chỉ nếu phương trình vi phân liên kết (4.3) ứng với một phép tham số riêng $\mathcal{P}(s)$ cũng vậy.*

Theo [57, Theorem 4.3], tồn tại phép tham số riêng tối ưu $\mathcal{P}(t)$ sao cho phương trình (4.3) có dạng

$$t' = \frac{dt}{dz} = f(z, t) \in \mathbb{C}(z, t). \tag{4.7}$$

Vậy không mất tính tổng quát, khi xét phương trình (4.3) chúng ta luôn có thể xét nó ở dạng phương trình (4.7).

Thuật toán `LiouSol`

Đầu vào: Phương trình $F(Y, Y') = 0$ (4.1) giống không.

Đầu ra: Nghiệm liouville của (4.1) nếu có.

1. Tìm phép tham số riêng tối ưu của đường cong $F(y, w) = 0$
$$\mathcal{P}(t) = (u(t), v(t)) \in (\mathbb{C}(z, t))^2.$$
2. Tính phương trình vi phân (4.7) tương ứng với $\mathcal{P}(t)$.
3. Nếu phương trình (4.7) có nghiệm liouville tổng quát $t(z)$, thì **trả về** "$Y(z) = u(t(z))$ là nghiệm liouville tổng quát của phương trình vi phân (4.1)".
4. Nếu khác, **trả về** "(4.1) không có nghiệm liouville tổng quát".

4.1.3 Khảo sát phương trình (4.7) và ví dụ

Mệnh đề 4.1.5. [37, Proposition 3.6] *Nếu phương trình vi phân (4.7) có dạng*
$$t' = b(z)t + c(z), \tag{4.8}$$
với $b(z), c(z) \in \mathbb{C}(z)$, thì nó luôn có nghiệm liouville.

Mệnh đề 4.1.7. [37, Proposition 3.8] *Giả sử rằng phương trình vi phân (4.7) có dạng một phương trình Riccati*
$$t' = a(z)t^2 + b(z)t + c(z), \tag{4.9}$$
với $a(z), b(z), c(z) \in \mathbb{C}(z)$ và $a(z) \neq 0$. Thế thì ta có thể xác định rằng phương trình này có nghiệm liouville hay không.

Mệnh đề 4.1.8. [37, Proposition 3.9] *Nếu phương trình vi phân (4.7) là autonom, thì ta có thể xác định liệu nó có nghiệm liouville hay không.*

4.2 Phép biến đổi luỹ thừa và áp dụng

4.2.1 Phép biến đổi luỹ thừa

Định nghĩa 4.2.1. [37, Definition 4.1] Một *phép biến đổi luỹ thừa* là một phép biến đổi có dạng

$$u = Y^n, u' = nY^{n-1}Y', 2 \leqslant n \in \mathbb{N}. \tag{4.19}$$

Cho k_0 là bậc thấp nhất của thành phần thuần nhất khác không của đa thức bất khả quy G, thế (4.19) vào G ta có

$$\begin{aligned} G(u, u') &= Y^{(n-1)k_0} \sum_{k=k_0}^{d} \sum_{i+j=k} c_{ij} n^j Y^{(n-1)(k-k_0)} Y^i Y'^j \\ &= Y^{(n-1)k_0} F(Y, Y'). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Bổ đề 4.2.2. [37, Lemma 4.2] Cho $G(u, u')$ và $F(Y, Y')$ là hai đa thức trên $\mathbb{C}(z)$. Nếu có một phép biến đổi luỹ thừa (4.19) sao cho biểu thức (4.22) được thoả, thế thì các điều sau đúng.

1. Với mỗi $k \geqslant k_0$, đa thức

$$F_{n_k}(Y, Y') = \sum_{i+j=k} c_{ij} n^j Y^{(n-1)(k-k_0)} Y^i Y'^j$$

   là thuần nhất bậc $n_k = n(k - k_0) + k_0$, và $n_{k_0} = k_0$ là bậc thấp nhất giữa các thành phần thuần nhất khác không của F.

2. Cho n_{k_1} và n_{k_2} là bậc của hai thành phần thuần nhất khác nhau của F. Thì n là một nhân tử chung của $(n_{k_1} - n_{k_0})$ và $(n_{k_2} - n_{k_0})$.

3. Nếu F là đa thức bất khả quy thì G cũng vậy. Trong trường hợp này, nếu F có giống không thì G cũng có giống không. Hơn nữa, điều ngược lại của hai tính chất này không đúng.

4.2.2 Dạng rút gọn bởi phép biến đổi luỹ thừa

Định nghĩa 4.2.3. [37, Definition 4.3] Cho $F(Y, Y')$ là một đa thức bất khả quy. Cho HD_F là tập hợp tất cả các bậc của các thành phần thuần nhất khác không của F, và chọn $n_{k_0} = k_0$ (xem (1.), Bổ đề 4.2.2) là thành phần bé nhất của HD_F. Ta định nghĩa tập hợp

$$\mathbb{D}_F = \left\{n \geqslant 2 \mid n \text{ là ước chung của tất cả } (m - k_0) \text{ với } m \in \mathrm{HD}_F\right\}. \tag{4.19}$$

Giả sử $\mathbb{D}_F \neq \varnothing$ và lấy $n \in \mathbb{D}_F$. Ta nói rằng phần tử n *cảm sinh* một phép biến đổi luỹ thừa (4.19) nếu tồn tại một đa thức bất khả quy $G(u, u')$ sao cho biểu thức (4.22) được thoả. Khi đó, chúng ta nói F *được biến đổi từ* G bởi phép biến đổi (4.19) tương ứng với n. Chúng ta định nghĩa tập hợp

$$\mathbb{P}_F = \{n \in \mathbb{D}_F \mid n \text{ cảm sinh một phép biến đổi luỹ thừa (4.19)}\}. \tag{4.20}$$

Rõ ràng, $\mathbb{P}_F \subseteq \mathbb{D}_F$. Nếu $\mathbb{D}_F = \varnothing$, thì $\mathbb{P}_F$ cũng là tập rỗng.

Bổ đề 4.2.4. [37, Lemma 4.4] Nếu $F(Y, Y')$ là một đa thức bất khả quy thuần nhất thì $\mathbb{D}_F$ là tập vô hạn. Hơn nữa, $\mathbb{D}_F$ đồng nhất với $\mathbb{P}_F$.

Bổ đề 4.2.5. [37, Lemma 4.5] Cho $F(Y, Y')$ là một đa thức bất khả quy không thuần nhất, thì $\mathbb{D}_F$ là tập hợp hữu hạn hoặc chỉ là tập rỗng. Hơn nữa, $\mathbb{D}_F$ và $\mathbb{P}_F$ là hai tập hợp khác nhau.

Định nghĩa 4.2.6. [37, Definition 4.6] Một đa thức bất khả quy không thuần nhất $F(Y, Y')$ được gọi là *dạng rút gọn* nếu $\mathbb{P}_F = \varnothing$. Ngoài ra, F được gọi là dạng không rút gọn.

Định lí 4.2.8. [37, Theorem 4.8] *Cho F là một dạng không rút gọn. Lấy n là phần tử lớn nhất của $\mathbb{P}_F$ và G là một đa thức bất khả quy sao cho F được biến đổi từ G ứng với phép biến đổi luỹ thừa cảm sinh bởi n. Thế thì G là một dạng rút gọn.*

Thuật toán `RedPol`

Đầu vào: Đa thức bất khả quy không thuần nhất $F(Y, Y')$.

Đầu ra: Dạng rút gọn và phép biến đổi (4.19) nếu có.

1. Viết F thành tổng các thành phần thuần nhất để tìm HD_F.
2. Xác định k_0 và $\mathbb{D}_F$.
3. Xác định $\mathbb{P}_F$.
4. Nếu $\mathbb{P}_F = \varnothing$, thì **trả về** "$F(Y, Y')$ là dạng rút gọn và không tồn tại phép biến đổi luỹ thừa (4.19)".
5. Nếu khác, cho $n = \max \mathbb{P}_F$ (phần tử lớn nhất của $\mathbb{P}_F$), **trả về** "Dạng rút gọn $G(u, u')$ và phép biến đổi (4.19) ứng với n".

Cho $F(Y, Y')$ là đa thức xác định phương trình vi phân (4.1) thế thì dạng rút gọn $G(u, u')$ (tìm được bởi Thuật toán `RedPol`) được xem là đa thức xác định của phương trình vi phân

$$G(u, u') = 0. \tag{4.25}$$

Định lí 4.2.11. [37, Theorem 4.11] *Giả sử $F(Y, Y') = 0$ (4.1) được biến đổi từ dạng rút gọn $G(u, u') = 0$ (4.25) bằng một phép biến đổi luỹ thừa (4.19) (ứng với $n \geqslant 2$). Thế thì (4.1) có một nghiệm liouville nếu và chỉ nếu (4.25) cũng vậy. Hơn nữa, nếu η là một nghiệm liouville của (4.1), tồn tại nghiệm liouville ξ của (4.25) thỏa*

$$Y^n - \eta = 0. \tag{4.26}$$

4.2.3 Áp dụng

Phương pháp trên được áp dụng để giải phương trình vi phân có giống dương nhưng dạng rút gọn có giống bằng không như [18, Example 6] hoặc [21, I·482, 485, 487, 504, 509, 541, 542, 543, 544].

4.3 Phép biến đổi Möbius

Một *phép biến đổi Möbius* là phép biến đổi có dạng

$$u = \frac{\alpha Y + \beta}{\gamma Y + \delta}, u' = \left(\frac{\alpha Y + \beta}{\gamma Y + \delta}\right)', \tag{4.34}$$

với $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \overline{\mathbb{C}(z)}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Định lí 4.3.3. [38, Theorem 3.1] *Giả sử phương trình vi phân F tương đương với G. Thế thì F có một nghiệm liouville nếu và chỉ nếu G cũng vậy. Trong trường hợp có nghiệm, sự tương ứng nghiệm giữa hai phương trình vi phân này là một-một.*

4.4 Phương trình vi phân đại số cấp một với hệ số liouville

Xét phương trình vi phân sau

$$\tilde{F}(y, y') = 0, \tag{4.40}$$

với y là hàm số của x và $\tilde{F} \in E[y, w]$, tức là một phương trình vi với hệ số trên trường mở rộng liouville của E của $\mathbb{C}(x)$. Giả sử rằng có một phép đổi biến

$$z = \varphi(x), \tag{4.41}$$

sao cho phương trình vi phân (4.40) được biến đổi thành một phương trình vi phân đại số (4.1) trên $\mathbb{C}(z)$, tức là

$$\tilde{F}(y, y') = F(Y, Y') = 0,$$

với $F \in \mathbb{C}(z)[y, w]$. Nếu $Y(z)$ là một nghiệm liouville của (4.1), thì

$$y(x) = Y \circ \varphi(x)$$

là một nghiệm liouville của (4.40).

Nếu ta xét hệ số siêu việt, có thể tham khảo [4, Chapter V]. Trường hợp xét hệ số căn thức, có thể tham khảo [5].

Kết luận và vấn đề tiếp tục quan tâm

Chúng tôi đã xem xét lớp phương trình vi phân đại số cấp một và nghiên cứu về nghiệm liouville của chúng. Một số phương pháp đã được dùng để tìm câu trả lời vấn đề này. Trong luận án này, chúng tôi đã đạt được các kết quả sau.

1. Chúng tôi đưa ra Định nghĩa 2.2.3 về dạng của một nghiệm liouville hữu tỷ. Trong Mục 2.4, chúng tôi trình bày Thuật toán `RatLiouSol` để tìm nghiệm liouville hữu tỷ của phương trình vi phân đại số cấp một autonom.

2. Bằng Bổ đề 3.2.2, chúng tôi chỉ ra được một nghiệm liouville (bao gồm cả nghiệm đại số và hữu tỷ) của phương trình vi phân đại số cấp một giống không autonom cũng chính là một nghiệm liouville hữu tỷ. Trong Mục 3.3, chúng tôi trình bày Thuật toán `LiouSolAut` để tìm và phân loại nghiệm liouville theo hai trường hợp nghiệm đại số và nghiệm siêu việt.

3. Trong Mục 4.1.2, chúng tôi trình bày Thuật toán `LiouSol` để tìm nghiệm liouville của phương trình vi phân đại số cấp một giống không (gồm cả trường hợp autonom và không autonom).

4. Chúng tôi đưa ra Định nghĩa 4.2.1 của phép biến đổi luỹ thừa và trình bày Thuật toán `RedPol` trong Mục 4.2.2 để tìm dạng rút gọn của một phương trình vi phân đại số cấp một. Từ đó đưa ra một phương pháp tìm nghiệm liouville của phương trình vi phân đại số có giống lớn hơn không nhưng dạng rút gọn của chúng thì có giống bằng không trong Mục 4.2.3.

5. Chúng tôi đưa vấn đề tìm nghiệm của phương trình vi phân đại số cấp một với hệ số thuộc vào một mở rộng liouville về việc giải một phương trình vi phân đại số dạng (4.1) bằng phép đổi biến trong Mục 4.4.

Sơ lược về các vấn đề chúng tôi tiếp tục quan tâm.

1. **Nghiên cứu sự liên quan về giống lớn hơn không của phương trình vi phân đại số cấp một khi thế một phép biến đổi luỹ thừa** (4.19) **vào một phương trình vi phân giống không**. Trong Mục 4.2, chúng tôi đã xem xét nhưng chưa đưa ra được một công thức rõ ràng về sự thay đổi của giống. Để tiếp tục nghiên cứu theo hướng này, chúng tôi sẽ tham khảo thêm các tài liệu liên quan [8, 24, 27, 31].

2. **Tiếp tục quan tâm đến việc tìm nghiệm liouville của phương trình vi phân** (4.7). Vấn đề này đã được xem xét ở Mục 4.1.3, để tiếp tục nghiên cứu, chúng tôi sẽ tham khảo thêm các tài liệu liên quan [4, 9, 53–55].

Danh mục công trình của tác giả

1. Nguyen T. D., Ngo L. X. C. (2021), "Rational liouvillian solutions of algebraic ordinary differential equations of order one", *Acta Mathematica Vietnamica*, 46 (4), pp. 689–700.

2. Nguyen T. D., Ngo L. X. C. (2023), "Liouvillian solutions of algebraic ordinary differential equations of order one of genus zero", *Journal of Systems Science and Complexity*, 36(2), pp. 884–893.

3. Nguyen T. D., Ngo L. X. C., "Liouvillian solutions of first-order algebraic ordinary differential equations", submitted.

4. Nguyen T. D. (2024), "Finding liouvillian solutions of first-order algebraic ordinary differential equations by change of variables", *Quy Nhon University Journal of Science*, 18(3), pp. 83–89.

Tài liệu tham khảo

[1] Aroca J. M., Cano J., Feng R., Gao X. S. (2005), "Algebraic General Solutions of Algebraic Ordinary Differential Equations", *Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pp. 29–36.

[2] Behloul D., Cheng S. S. (2011), "Computation of rational solutions for a first-order nonlinear differential equation", *Electronic Journal of Differential Equations*, 121, pp. 1–16.

[3] Behloul D., Cheng S. S. (2020), "Computation of exact solutions of abel type differential equations", *Applied Mathematics E-Notes*, pp. 1–7.

[4] Bronstein M. (2004), *Symbolic Integration I: Transcendental Functions, Algorithms and Computation in Mathematics*, 2nd edition, Springer.

[5] Caravantes J., Sendra J. R., Sevilla D., Villarino C. (2021), "Transforming ODEs and PDEs from radical coefficients to rational coefficients", *Mediterranean Journal of Mathematics*, 18(96).

[6] Chalkley R. (1994), "Lazarus fuchs' transformation for solving rational first-order differential equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 187, 961–985.

[7] Chen G., Ma Y. (2005), “Algorithmic reduction and rational general solutions of first order algebraic differential equations”, *In Wang D., Zheng Z.(eds) Differential Equations with Symbolic Computation. Trends in Mathematics*, pp. 201–212, Birkhäuser Basel.

[8] Chevalley C. (1951), *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*, Mathematical Surveys and Monographs, 1st edition, American Mathematical Society.

[9] Duarte L. G. S., Da Mota L. A. C. P. (2021), “An efficient method for computing Liouvillian first integrals of planar polynomial vector fields”, *Journal of Differential Equations*, 300, pp. 356–385.

[10] Eremenko A. (1982), “Meromorphic solutions of algebraic differential equations”, *Russian Mathematical Surveys*, 37(4), pp. 61–95.

[11] Eremenko A. (1998), “Rational solutions of first-order differential equations”, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica*, 23(1), pp. 181–190.

[12] Falkensteiner S., Mitteramskogler J. J., Sendra J. R., Winkler F. (2023), “The algebro-geometric method: Solving algebraic differential equations by parametrizations”, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 60, pp. 85–122.

[13] Falkensteiner S., Sendra J. R. (2020), “Solving first order autonomous algebraic ordinary differential equations by places”, *Mathematics in Computer Science*, pp. 327–337.

[14] Feng R., Gao X. S. (2004), “Rational general solutions of algebraic ordinary differential equations”, *In Proceedings of the 2004 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pp. 155–162.

[15] Feng R., Gao X. S. (2006), "A polynomial time algorithm for finding rational general solutions of first order autonomous odes", *Journal of Symbolic Computation*, 41, pp. 739–762.

[16] Fuchs L. (1884), "Über Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen", *Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschafte*, pp. 699–710.

[17] Galbraith S. T. (2012), *Mathematics of Public Key Cryptography*, Cambridge University Press.

[18] Grasegger G. (2014), "Radical solutions of first order autonomous algebraic ordinary differential equations", *In Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pp. 217–223.

[19] Hubert E. (1996), "The general solution of an ordinary differential equation", *In Proceedings of the 1996 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pp. 189–195.

[20] Ince E. L. (1926), *Ordinary differential equations*, Longmans.

[21] Kamke E. (1977), *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart.

[22] Koblitz N. (1989), "Hyperelliptic Cryptosystems", *Journal of Cryptology*, 1, pp. 139–150.

[23] Kolchin E. R. (1953), "Galois theory of differential fields", *American Journal of Mathematics*, 75(4), pp. 753–824.

[24] Kolchin E. R. (1973), *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press.

[25] Kovacic J. (1986), "An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations", *Journal of Symbolic Computation*, 2(1), pp. 3–43.

[26] Kunz E., Belshoff R. G. (2005), *Introduction to Plane Algebraic Curves*, first edition, Birkhäuser.

[27] Lang S. (1982), *Introduction to Algebraic and Abelian Functions*, GTM 89, Second edition Springer-Verlag, New York.

[28] Lang S. (2005), *Algebra*, GTM 211, Revised third edition Springer, New York.

[29] Malmquist J. (1913) "Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre", *Acta Mathematica*, 36, 297–343.

[30] Matsuda M. (1978), "Algebraic differential equations of the first order free from parametric singularities from the differential-algebraic standpoint", *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 30(3), pp. 447–455.

[31] Matsuda M. (1980), *First order algebraic differential equations: A differential algebraic approach*, Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.

[32] Ngo L. X. C., Ha T. T. (2020), "Möbius transformations on algebraic odes of order one and algebraic general solutions of the autonomous equivalence classes", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 380, pp. 112999.

[33] Ngo L. X. C., Winkler F. (2010), "Rational general solutions of first order non-autonomous parametrizable odes", *Journal of Symbolic Computation*, 45, pp. 1426–1441.

[34] Ngo L. X. C., Winkler F. (2011), "Rational general solutions of planar rational systems of autonomous odes", *Journal of Symbolic Computation*, 46, pp. 1173–1186.

[35] Nguyen T. D., Ngo L. X. C. (2021), "Rational liouvillian solutions of algebraic ordinary differential equations of order one", *Acta Mathematica Vietnamica*, 46 (4), pp. 689–700.

[36] Nguyen T. D., Ngo L. X. C. (2023), "Liouvillian solutions of algebraic ordinary differential equations of order one of genus zero", *Journal of Systems Science and Complexity*, 36(2), pp. 884–893.

[37] Nguyen T. D., Ngo L. X. C., "Liouvillian solutions of first-order algebraic ordinary differential equations", submitted.

[38] Nguyen T. D., "Finding liouvillian solutions of first-order algebraic ordinary differential equations by change of variables", *Quy Nhon University Journal of Science*, 18(3), pp. 83–89.

[39] Ngô L. X. C., Sendra J. R., Winkler F. (2015), "Birational transformations preserving rational solutions of algebraic ordinary differential equations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 286, pp. 114–127.

[40] Prelle M. J., Singer M. F. (1983), "Elementary first integrals of differential equations", *Transactions of the American Mathematical Society*, 279(1), pp. 215–229.

[41] Risch R. H. (1969), "The problem of integration in finite terms", *Transactions of the American Mathematical Society*, 139, pp. 167–189.

[42] Risch R. H. (1970), "The solution of the problem of integration in finite terms", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 76, 605–608.

[43] Ritt J. F. (1950), *Differential algebra*, American Mathematical Society.

[44] Rosenlicht M. (1968), "Liouville's theorem on functions with elementary integral", *Pacific Journal of Mathematics*, 24(1), pp. 153–161.

[45] Rosenlicht M. (1969), “On the explicit solvability of certain transcendental equations”, *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Scientifiques*, 36, pp. 15–22.

[46] Rosenlicht M. (1973), “An analogue of L’Hospital rule”, *In Proceedings of the American Mathematical Society*, 37(2), pp. 369–373.

[47] Sendra J. R., Sevilla D. (2011), “Radical parametrizations of algebraic curves by adjoint curves”, *Journal of Symbolic Computation*, 46(9), pp. 1030–1038.

[48] Sendra J. R., Sevilla D., Villarino C. (2017), “Algebraic and algorithmic aspects of radical parametrizations”, *Computer Aided Geometric Design*, 55, pp. 1–14.

[49] Sendra J. R., Winkler F. (2001), “Tracing index of rational curve parametrizations”, *Computer Aided Geometric Design*, 18(8), pp. 771–795.

[50] Sendra J. R., Winkler F., Pérez-Díaz S. (2008), *Rational Algebraic Curves - A Computer Algebra Approach*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[51] Singer M. F. (1975), “Elementary solutions of differential equations”, *Pacific Journal of Mathematics*, 59(2), pp. 535–547.

[52] Singer M. F. (1977), “Functions satisfying elementary relations”, *Transactions of The American Mathematical Society*, 227, pp. 185–206.

[53] Singer M. F. (1990), “Formal solutions of differential equations”, *Journal of Symbolic Computation*, 10, pp. 59–94.

[54] Singer M. F. (1991), “Liouvillian solutions of linear differential equations with liouvillian coefficients”, *Journal of Symbolic Computation*, 11, pp. 251–273.

[55] Singer M. F. (1992), “Liouvillian first integrals of differential equations”, *Transactions of The American Mathematical Society*, 333(2), pp. 673–688.

[56] Srinivasan V. R. (2017), “Liouvillian solutions of first order nonlineardifferential equations”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 221, pp. 411–421.

[57] Vo N. T., Grasegger G., Winkler F. (2018), “Deciding the existence of rational general solutions for first-order algebraic odes”, *Journal of Symbolic Computation*, 87, 127–139.

[58] Waerden V. D. (1949), *Modern algebra. Vol 1*, Federick Ungar Publishing, New York.

[59] Walker R. J. (1978), *Algebraic Curves*, Springer-Verlag, New York, (Reprint of the first editition published by Princeton University Press, 1950).